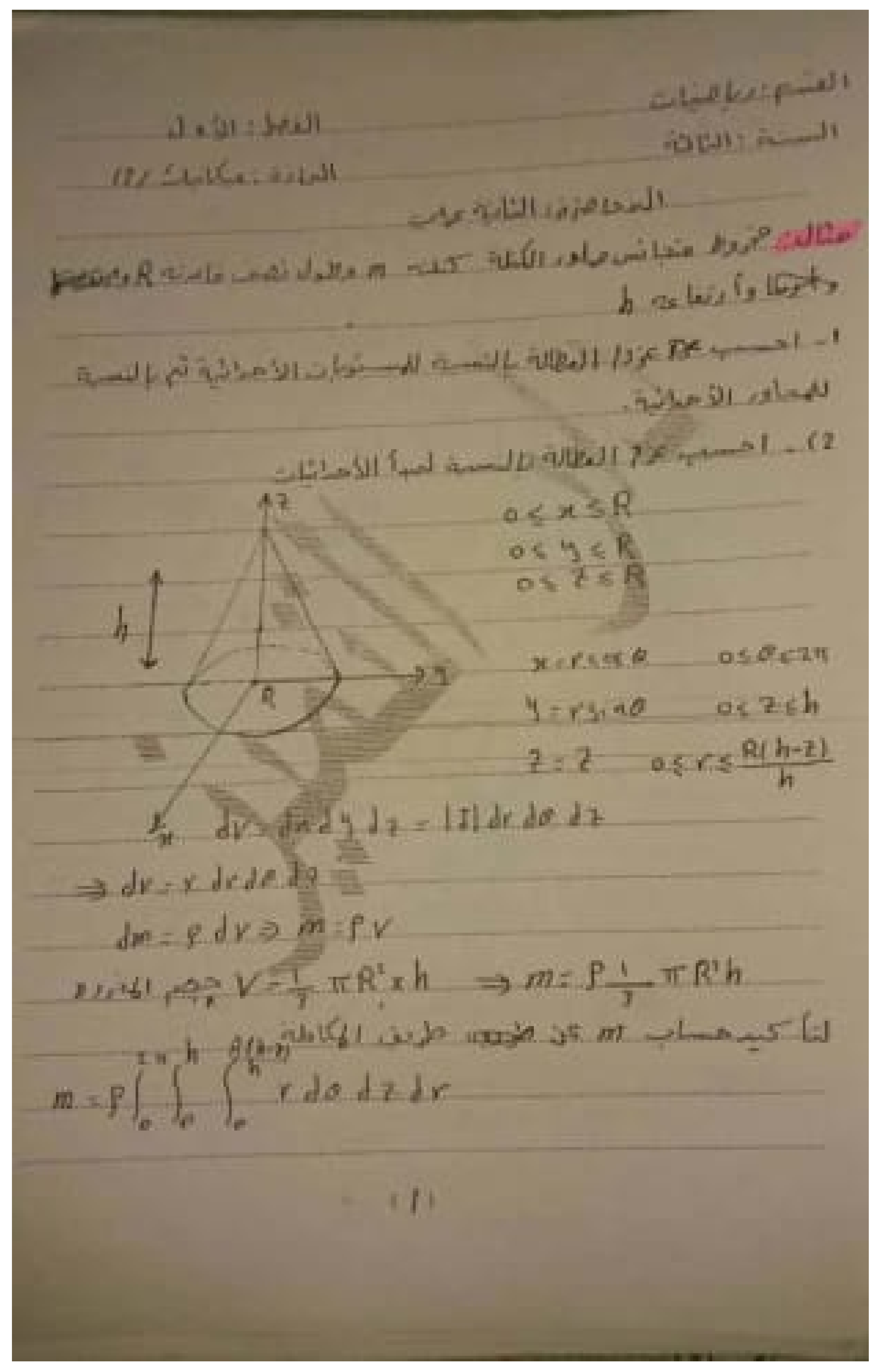


القسم: رياضيات
السنة: الثالثة

الفصل: الأول
المادة: ميكانيك (2)

المحاضرة: الثانية عملي

مسألة: مخروط متجانس صلب الكتلة كتلته m وطول نصف قاعدته R وارتفاعه h

1- احسب عزوم العطالة بالنسبة للمستويات الإحداثية ثم بالنسبة للمحاور الإحداثية.

2- احسب عزم العطالة بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

$0 \le x \le R$

$0 \le y \le R$

$0 \le z \le R$

$x = r\cos\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$

$y = r\sin\theta \qquad 0 \le z \le h$

$z = z \qquad 0 \le r \le \frac{R(h-z)}{h}$

$dv = dx\,dy\,dz = |J|\,dr\,d\theta\,dz$

$\Rightarrow dv = r\,dr\,d\theta\,dz$

$dm = \rho\,dv \Rightarrow m = \rho V$

حجم المخروط $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow m = \rho \frac{1}{3}\pi R^2 h$

لنا كيف حساب m عن طريق التكاملات

$$m = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{h}\int_0^{\frac{R(h-z)}{h}} r\,d\theta\,dz\,dr$$

Scanned by CamScanner

$$m = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \left[\int_0^{\frac{R(h-z)}{h}} r\,dr \right] dz$$

$$= \rho 2\pi \int_0^h \left[\frac{R^2(h-z)^2}{2h^2} \right] dz = \frac{\rho 2\pi R^2}{2h^2} \int_0^h (h-z)^2\,dz$$

$$= \frac{\rho \pi R^2}{h^2} \left[\frac{-(h-z)^3}{3} \right]_0^h = \frac{\rho \pi R^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \rho \pi R^2 h$$

$$I_{xy} = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{\frac{R(h-z)}{h}} z^2\,dV$$

$$= \rho \iiint z^2 r\,dr\,d\theta\,dz = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h z^2 \left[\int_0^{\frac{R(h-z)}{h}} r\,dr \right] dz$$

$$= \rho 2\pi \int_0^h z^2 \left[\frac{R^2(h-z)^2}{2h^2} \right] dz = \frac{\rho 2\pi R^2}{2h^2} \int_0^h z^2 (h-z)^2\,dz$$

$$= \frac{\rho 2\pi R^2}{2h^2} \left[\int_0^h z^2 h^2\,dz - 2h \int_0^h z^3\,dz + \int_0^h z^4\,dz \right]$$

$$= \frac{\rho \pi R^2}{h^2} \left[h^2 \frac{h^3}{3} - 2h \frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{5} \right]$$

$$= \frac{\rho \pi R^2}{h^2} \left[\frac{h^5}{3} - \frac{h^5}{2} + \frac{h^5}{5} \right] = \frac{\rho \pi R^2}{h^2} \left[\frac{h^5}{30} \right]$$

$$I_{xy} = \frac{\rho \pi R^2 h^3}{30} = \frac{1}{3} \rho \pi R^2 h \frac{h^2}{10}$$

$$\Rightarrow I_{xy} = m \frac{h^2}{10}$$

Scanned by CamScanner

$$I_{yz} = \int_v x^2\, dv \quad ; \quad x = r\cos\theta$$

$$I_{xy} = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{h} \int_0^{\frac{R(h-z)}{h}} (r^2 \cos^2\theta)\, r\, dr\, d\theta\, dz$$

$$\Rightarrow \rho \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \int_0^{h} \left[\int_0^{\frac{R(h-z)}{h}} r^3\, dr \right] dz$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta \int_0^{h} \left[\frac{R^4 (h-z)^4}{4h^4} \right] dz$$

$$= \rho [\pi] \cdot \frac{R^4}{4h^4} \int_0^{h} (h-z)^4\, dz$$

$$= \pi \rho \frac{R^4}{4h^4} \left[\frac{-(h-z)^5}{5} \right]_0^{h} = \frac{\rho \pi R^4}{4h^4} \left[\frac{h^5}{5} \right]$$

$$= \frac{\rho \pi R^4 h}{20} = \frac{\rho \pi R^2 h}{3} \cdot \frac{3R^2}{20} = \frac{3mR^2}{20}$$

$$I_{xz} = \rho \iiint r^2 \sin^2\theta\, r\, dr\, d\theta\, dz$$

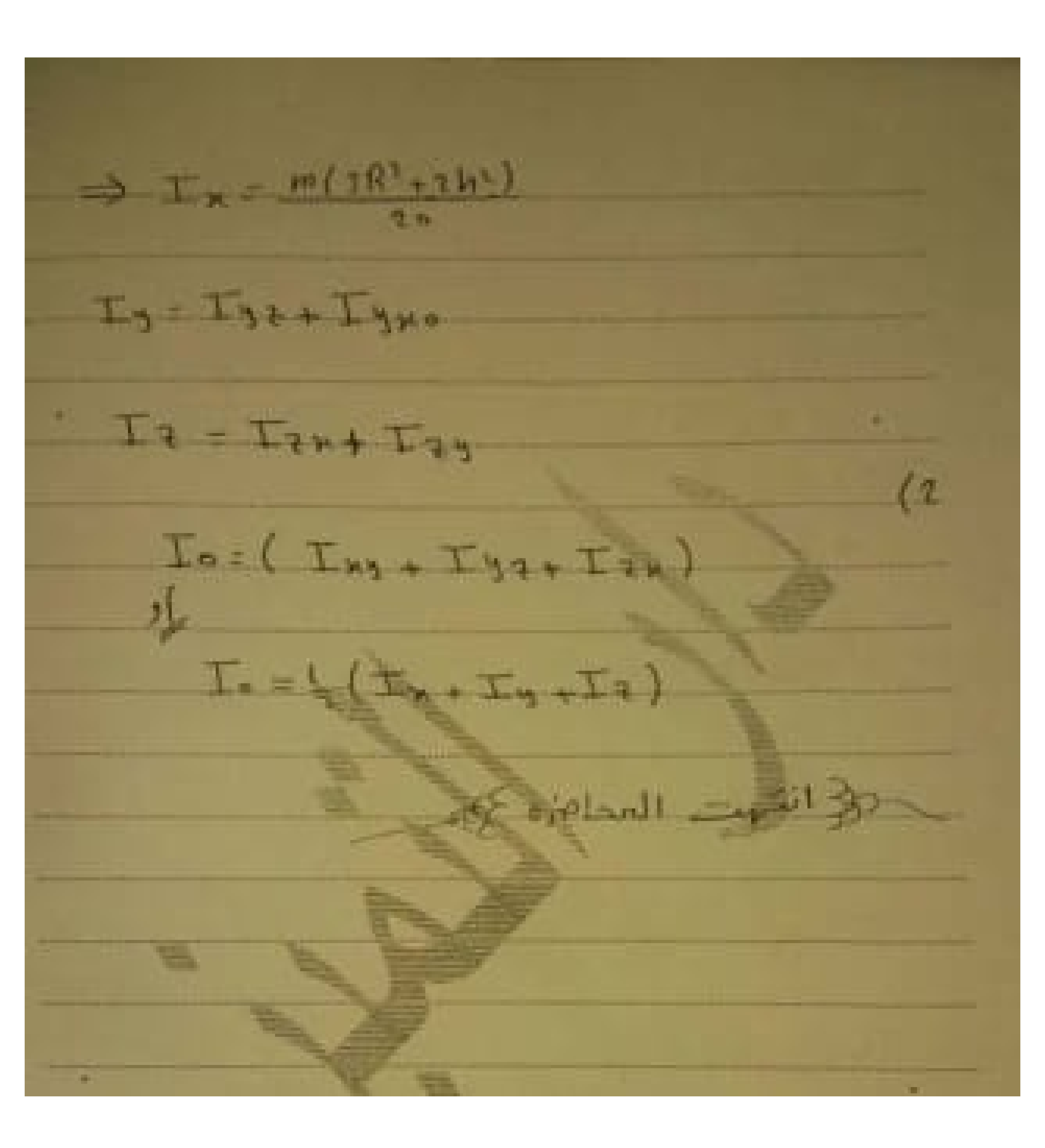
$$= \rho \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta \int_0^{h} \left[\int_0^{\frac{R(h-z)}{h}} r^3\, dr \right] dz$$

$$= \frac{3mR^2}{20}$$

أن عزم العطالة بالنسبة للمحاور الاحداثية :

$$I_x = I_{xz} + I_{xy} = \frac{3mR^2}{20} + \frac{mh^2}{10}$$

Scanned by CamScanner



$$\Rightarrow I_x = \frac{m(3R^2+2h^2)}{20}$$

$$I_y = I_{yz} + I_{yx_0}$$

$$I_z = I_{zx} + I_{zy}$$

(2

$$I_o = (I_{xy} + I_{yz} + I_{zx})$$

أو

$$I_o = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)$$

انتهت المحاضرة

Scanned by CamScanner